

`$SPAD/src/input kamke1.input`

Timothy Daly

December 30, 2008

**Abstract**

This is the next 50 of the Kamke test suite as published by E. S. Cheb-Terrab[1]. They have been rewritten using Axiom syntax. Where possible we show that the particular solution actually satisfies the original ordinary differential equation.

## Contents

```

(*)≡
)spool kamke1.output
)set break resume
)set mes auto off
)clear all

--S 1 of 120
y:=operator 'y
--R
--R
--R (1) y
--R
--R                                          Type: BasicOperator
--E 1

--S 2 of 120
f := operator 'f
--R
--R
--R (2) f
--R
--R                                          Type: BasicOperator
--E 2

--S 3 of 120
g := operator 'g
--R
--R
--R (3) g
--R
--R                                          Type: BasicOperator
--E 3

--S 4 of 120
h := operator 'h
--R
--R
--R (4) h
--R
--R                                          Type: BasicOperator
--E 4

--S 5 of 120
ode51 := D(y(x),x) - (y(x)-f(x))*(y(x)-g(x))*(y(x)-(a*f(x)+b*g(x))/(a+b))*h(x) -
- D(f(x),x)*(y(x)-g(x))/(f(x)-g(x)) -
- D(g(x),x)*(y(x)-f(x))/(g(x)-f(x))
--R
--R
--R (5)
--R
--R          ,
--R ((b + a)g(x) + (- b - a)f(x))y (x) + ((- b - a)y(x) + (b + a)f(x))g (x)
--R
--R          +
--R
--R          ,

```

```

--R      ((b + a)y(x) + (- b - a)g(x))f (x)
--R
--R      +
--R      ((- b - a)g(x) + (b + a)f(x))h(x)y(x)3
--R
--R      +
--R      ((2b + a)g(x)2 + (- b + a)f(x)g(x) + (- b - 2a)f(x)2)h(x)y(x)2
--R
--R      +
--R      (- b g(x)3 + (- b - 2a)f(x)g(x)2 + (2b + a)f(x) g(x)2 + a f(x)3)h(x)y(x)
--R
--R      +
--R      (b f(x)g(x)3 + (- b + a)f(x)2 g(x)2 - a f(x)3 g(x))h(x)
--R
--R      /
--R      (b + a)g(x) + (- b - a)f(x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 5

```

```

--S 6 of 120
ode51a:=solve(ode51,y,x)
--R
--R      (6)  "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 6

```

```

--S 7 of 120
ode52 := D(y(x),x) - a*y(x)**n - b*x**(n/(1-n))
--R
--R
--R      ,
--R      (7)  y (x) - a y(x)n - b xn - 1
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 7

```

```

--S 8 of 120
ode52a:=solve(ode52,y,x)
--R
--R      (8)  "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 8

```

```

--S 9 of 120
ode53 := D(y(x),x) - f(x)**(1-n)*D(g(x),x)*y(x)**n/(a*g(x)+b)**n _

```

```

--R      - D(f(x),x)*y(x)/f(x) - f(x)*D(g(x),x)
--R (9)
--R      n ,
--R      f(x)(a g(x) + b) y (x)
--R
--R      +
--R      - n + 1      n      2      n ,      n ,
--R      (- f(x)f(x)      y(x) - f(x) (a g(x) + b) )g (x) - y(x)(a g(x) + b) f (x)
--R
--R      /
--R      n
--R      f(x)(a g(x) + b)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 9

```

```

--S 10 of 120
ode53a:=solve(ode53,y,x)
--R
--R (10) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 10

```

```

--S 11 of 120
ode54 := D(y(x),x) - a**n*f(x)**(1-n)*D(g(x),x)*y(x)**n - _
      D(f(x),x)*y(x)/f(x) - f(x)*D(g(x),x)
--R
--R      ,      n      - n + 1      n      2      ,      ,
--R      f(x)y (x) + (- f(x)a f(x)      y(x) - f(x) )g (x) - y(x)f (x)
--R
--R (11) -----
--R                                          f(x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 11

```

```

--S 12 of 120
ode54a:=solve(ode54,y,x)
--R
--R (12) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 12

```

```

--S 13 of 120
ode55 := D(y(x),x) - f(x)*y(x)**n - g(x)*y(x) - h(x)
--R
--R      ,      n

```

```

--R (13)  $y(x) - f(x)y(x) - g(x)y(x) - h(x)$ 
--R
--R Type: Expression Integer
--E 13

```

```

--S 14 of 120
ode55a:=solve(ode55,y,x)
--R
--R (14) "failed"
--R
--R Type: Union("failed",...)
--E 14

```

```

--S 15 of 120
ode56 := D(y(x),x) - f(x)*y(x)**a - g(x)*y(x)**b
--R
--R
--R (15)  $y(x) - g(x)y(x)^b - f(x)y(x)^a$ 
--R
--R Type: Expression Integer
--E 15

```

```

--S 16 of 120
ode5a:=solve(ode56,y,x)
--R
--R (16) "failed"
--R
--R Type: Union("failed",...)
--E 16

```

```

--S 17 of 120
ode57 := D(y(x),x) - sqrt(abs(y(x)))
--R
--R
--R (17)  $-\sqrt{|y(x)|} + y(x)$ 
--R
--R Type: Expression Integer
--E 17

```

```

--S 18 of 120
yx:=solve(ode57,y,x)
--R
--R
--R (18) 
$$\frac{-x\sqrt{|y(x)|} + 2y(x)}{\sqrt{|y(x)|}}$$

--R
--R Type: Union(Expression Integer,...)

```

--E 18

--S 19 of 120

ode57expr := D(yx,x) - sqrt(abs(yx))

--R

--R (19)

$$\frac{-\sqrt{|y(x)|} \sqrt{|\text{abs}(y(x))|} \sqrt{\frac{x\sqrt{|\text{abs}(y(x))} - 2y(x)}{\sqrt{|y(x)|}}}, y(x)\sqrt{|\text{abs}(y(x))|} - \text{abs}(y(x))}{\sqrt{|y(x)|} \sqrt{|\text{abs}(y(x))|}}$$

Type: Expression Integer

--E 19

--S 20 of 120

ode58 := D(y(x),x) - a\*sqrt(y(x)) - b\*x

--R

$$(20) \quad y(x) - a\sqrt{y(x)} - b x$$

--R

Type: Expression Integer

--E 20

--S 21 of 120

ode58a:=solve(ode58,y,x)

--R

--R (21) "failed"

--R

Type: Union("failed",...)

--E 21

-- this never finishes

-- ode59 := D(y(x),x) - a\*sqrt(y(x)\*\*2+1) - b

--

--S 22 of 120

ode60 := D(y(x),x) - sqrt(y(x)\*\*2-1)/sqrt(x\*\*2-1)

--R

$$\sqrt{x^2 - 1} y(x) - \sqrt{|y(x)|^2 - 1}$$

```

--R
--R (22) -----
--R          +-----+
--R          | 2
--R         \|x  - 1
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 22

```

```

--S 23 of 120
ode60a:=solve(ode60,y,x)
--R
--R (23) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 23

```

```

--S 24 of 120
ode61 := D(y(x),x) - sqrt(x**2-1)/sqrt(y(x)**2-1)
--R
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2          ,          | 2
--R         \|y(x)  - 1 y (x) - \|x  - 1
--R
--R (24) -----
--R          +-----+
--R          | 2
--R         \|y(x)  - 1
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 24

```

```

--S 25 of 120
yx:=solve(ode61,y,x)
--R
--R (25)
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2          2          | 2
--R         (4x y(x)\|x  - 1  + (- 4x  + 2)y(x))\|y(x)  - 1
--R      +
--R          +-----+
--R          2          | 2          2          2          2
--R         (- 4x y(x)  + 2x)\|x  - 1  + (4x  - 2)y(x)  - 2x  + 1
--R      *
--R          +-----+
--R          | 2
--R         log(\|y(x)  - 1  - y(x))
--R      +
--R          +-----+          +-----+

```



```

--R      | 2      2      | 2
--R      (- 4x y(x)\|x - 1 + (4x - 2)y(x))log(\|x - 1 - x)
--R      +
--R      +-----+
--R      3      3      | 2      2      3
--R      (- 4x y(x) + 4x y(x))\|x - 1 + (4x - 2)y(x)
--R      +
--R      4      2
--R      (- 4x + 2x + 1)y(x)
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2
--R      \|y(x) - 1
--R      +
--R      +-----+
--R      2      | 2      2      2      2      | 2
--R      ((4x y(x) - 2x)\|x - 1 + (- 4x + 2)y(x) + 2x - 1)log(\|x - 1 - x)
--R      +
--R      +-----+
--R      4      3      2      3      | 2      2      4
--R      (4x y(x) + (- 4x - 2x)y(x) + 2x - x)\|x - 1 + (- 4x + 2)y(x)
--R      +
--R      4      2      4      2
--R      (4x - 2)y(x) - 2x + 2x
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2      2      | 2
--R      (8x y(x)\|x - 1 + (- 8x + 4)y(x))\|y(x) - 1
--R      +
--R      +-----+
--R      2      | 2      2      2      2
--R      (- 8x y(x) + 4x)\|x - 1 + (8x - 4)y(x) - 4x + 2
--R
--R      Type: Union(Expression Integer,...)
--E 25

```

--S 26 of 120

```
ode61expr := D(yx,x) - sqrt(x**2-1)/sqrt(yx**2-1)
```

--R

--R (26)

```

--R      4      2      5      4      2      3
--R      (- 64x + 64x - 8)y(x) + (96x - 96x + 12)y(x)
--R      +
--R      4      2
--R      (- 32x + 32x - 4)y(x)
--R      *
--R      +-----+

```

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x^2 - 1} \\
& + (64x^5 - 96x^3 + 32x)y(x)^5 + (-96x^5 + 144x^3 - 48x)y(x)^3 \\
& + (32x^5 - 48x^3 + 16x)y(x)^3 \\
& * \sqrt{y(x)^2 - 1} \\
& + (64x^4 - 64x^2 + 8)y(x)^6 + (-128x^4 + 128x^2 - 16)y(x)^4 \\
& + (72x^4 - 72x^2 + 9)y(x)^2 - 8x^4 + 8x^2 - 1 \\
& * \sqrt{x^2 - 1} \\
& + (-64x^5 + 96x^3 - 32x)y(x)^6 + (128x^5 - 192x^3 + 64x)y(x)^4 \\
& + (-72x^5 + 108x^3 - 36x)y(x)^2 + 8x^5 - 12x^3 + 4x \\
& * y'(x) \\
& + (64x^5 - 96x^3 + 32x)y(x)^4 + (-64x^5 + 96x^3 - 32x)y(x)^2 + 8x^5 \\
& - 12x^3 + 4x \\
& * \sqrt{x^2 - 1} \\
& + (-64x^6 + 128x^4 - 72x^2 + 8)y(x)^4 + (64x^6 - 128x^4 + 72x^2 - 8)y(x)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-8x^6 + 16x^4 - 9x^2 + 1) \\
& * \sqrt{y(x)^2 - 1} \\
& + (-64x^5 + 96x^3 - 32x)y(x)^5 + (96x^5 - 144x^3 + 48x)y(x)^3 \\
& + (-32x^5 + 48x^3 - 16x)y(x)^3 \\
& * \sqrt{x^2 - 1} \\
& + (64x^6 - 128x^4 + 72x^2 - 8)y(x)^5 + (-96x^6 + 192x^4 - 108x^2 + 12)y(x)^3 \\
& + (32x^6 - 64x^4 + 36x^2 - 4)y(x)^3 \\
& * \text{ROOT} \\
& \left( (64x^3 - 32x)y(x)^3 + (-32x^3 + 16x)y(x) \right) \sqrt{x^2 - 1} \\
& + (-64x^4 + 64x^2 - 8)y(x)^3 + (32x^4 - 32x^2 + 4)y(x)^2 \\
& * \sqrt{y(x)^2 - 1} \\
& + ((-64x^3 + 32x)y(x)^4 + (64x^3 - 32x)y(x)^2 - 8x^2 + 4x) \\
& * \sqrt{x^2 - 1} \\
& + (64x^4 - 64x^2 + 8)y(x)^4 + (-64x^4 + 64x^2 - 8)y(x)^2 + 8x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 8x + 1 \\
& * \\
& \quad +-----+ \quad 2 \\
& \quad | \quad 2 \\
& \log(\sqrt{|y(x) - 1 - y(x)}) \\
& + \\
& \quad +-----+ \\
& \quad \quad \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad \quad \quad +-----+ \\
& \quad \quad \quad | \quad 2 \\
& \quad \quad \quad ((- 128x^3 + 64x^3)y(x)^3 + (64x^3 - 32x)y(x))\sqrt{|x - 1} \\
& \quad + \\
& \quad \quad \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \\
& \quad \quad \quad (128x^4 - 128x^2 + 16)y(x)^3 + (- 64x^4 + 64x^2 - 8)y(x) \\
& * \\
& \quad +-----+ \\
& \quad \quad \quad | \quad 2 \\
& \quad \quad \quad \log(\sqrt{|x - 1 - x}) \\
& + \\
& \quad \quad \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \\
& \quad \quad \quad (- 128x^3 + 64x^5)y(x)^5 + (128x^5 - 48x^3) \\
& \quad + \\
& \quad \quad \quad 5 \quad 3 \\
& \quad \quad \quad (- 64x^5 + 48x^3)y(x) \\
& * \\
& \quad +-----+ \\
& \quad \quad \quad | \quad 2 \\
& \quad \quad \quad \sqrt{|x - 1} \\
& + \\
& \quad \quad \quad 4 \quad 2 \quad 5 \\
& \quad \quad \quad (128x^4 - 128x^2 + 16)y(x)^5 \\
& + \\
& \quad \quad \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \\
& \quad \quad \quad (- 128x^6 + 64x^4 + 64x^2 - 16)y(x)^3 \\
& + \\
& \quad \quad \quad 6 \quad 4 \quad 2 \\
& \quad \quad \quad (64x^6 - 80x^4 + 16x^2 + 2)y(x) \\
& * \\
& \quad +-----+ \\
& \quad \quad \quad | \quad 2 \\
& \quad \quad \quad \sqrt{|y(x) - 1} \\
& + \\
& \quad \quad \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \\
& \quad \quad \quad (128x^3 - 64x^4)y(x)^4 + (- 128x^3 + 64x^2)y(x)^2 + 16x^3 \\
& \quad + \\
& \quad \quad \quad - 8x \\
& * \\
& \quad +-----+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x^2 - 1} \\
& + \left( (-128x^4 + 128x^2 - 16)y(x)^4 + (128x^4 - 128x^2 + 16)y(x)^2 - 16x^4 + 16x^2 - 2 \right) \\
& * \log(\sqrt{x^2 - 1} - x) \\
& + \left( (128x^3 - 64x^6)y(x)^5 + (-128x^5 - 64x^3 + 80x)y(x)^4 + (128x^5 - 64x^3 - 16x^2)y(x)^3 - 16x^5 + 16x^3 - 2x \right) \\
& * \sqrt{x^2 - 1} \\
& + \left( (-128x^4 + 128x^2 - 16)y(x)^6 + (128x^6 - 128x^2 + 24)y(x)^4 + (-128x^6 + 128x^4 - 8)y(x)^2 + 16x^6 - 24x^4 + 8x^2 \right) \\
& * \log(\sqrt{|y(x)^2 - 1} - y(x)) \\
& + \left( ((64x^3 - 32x^3)y(x)^3 + (-32x^3 + 16x)y(x)^2)\sqrt{x^2 - 1} + (-64x^4 + 64x^2 - 8)y(x)^3 + (32x^4 - 32x^2 + 4)y(x)^2 \right) \\
& * \log(\sqrt{x^2 - 1} - x) \\
& + (128x^3 - 64x^5)y(x)^5 + (-128x^5 + 48x^3)y(x)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \\
& (64x^5 - 48x^3)y(x) \\
& * \\
& +-----+ \\
& | 2 \\
& \sqrt{x - 1} \\
& + \\
& (-128x^4 + 128x^2 - 16)y(x) \\
& + \\
& (128x^6 - 64x^4 - 64x^2 + 16)y(x) \\
& + \\
& (-64x^6 + 80x^4 - 16x^2 - 2)y(x) \\
& * \\
& +-----+ \\
& | 2 \\
& \log(\sqrt{x - 1} - x) \\
& + \\
& (64x^3 - 32x^7)y(x) + (-128x^5 + 32x^3 + 32x)y(x) \\
& + \\
& (64x^7 + 32x^5 - 320x^3 + 128x)y(x) \\
& + \\
& (-32x^7 + 32x^5 + 128x^3 - 66x)y(x) \\
& * \\
& +-----+ \\
& | 2 \\
& \sqrt{x - 1} \\
& + \\
& (-64x^4 + 64x^2 - 8)y(x) + (128x^6 - 96x^4 - 32x^2 + 12)y(x) \\
& + \\
& (-64x^8 + 344x^4 - 280x^2 + 28)y(x) \\
& + \\
& (32x^8 - 48x^6 - 116x^4 + 132x^2 - 16)y(x) \\
& * \\
& +-----+ \\
& | 2 \\
& \sqrt{y(x) - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \\
& \left( (-64x^3 + 32x^4)y(x) + (64x^3 - 32x^2)y(x) - 8x^3 + 4x \right) \\
& * \\
& \sqrt{x^2 - 1} \\
& + \\
& \left( (64x^4 - 64x^2 + 8)y(x) + (-64x^4 + 64x^2 - 8)y(x) + 8x^4 \right) \\
& + \\
& \left( -8x^2 + 1 \right) \\
& * \\
& \log(\sqrt{x^2 - 1} - x) \\
& + \\
& \left( (-128x^3 + 64x^6)y(x) + (128x^5 + 64x^3 - 80x)y(x) \right) \\
& + \\
& \left( (-128x^5 + 64x^3 + 16x^2)y(x) + 16x^5 - 16x^3 + 2x \right) \\
& * \\
& \sqrt{x^2 - 1} \\
& + \\
& \left( (128x^4 - 128x^2 + 16)y(x) + (-128x^6 + 128x^2 - 24)y(x) \right) \\
& + \\
& \left( (128x^6 - 128x^4 + 8)y(x) - 16x^6 + 24x^4 - 8x^2 \right) \\
& * \\
& \log(\sqrt{x^2 - 1} - x) \\
& + \\
& \left( (-64x^3 + 32x^8)y(x) + (128x^5 - 48x^6)y(x) \right) \\
& + \\
& \left( (-64x^7 - 96x^5 + 344x^3 - 116x^4)y(x) \right) \\
& + \\
& \left( (64x^7 - 32x^5 - 280x^3 + 132x^2)y(x) - 8x^7 + 12x^5 + 28x^3 - 16x \right)
\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
& * \\
& \quad +-----+ \\
& \quad \quad | \quad 2 \\
& \quad \quad \|x^2 - 1 \\
& + \\
& \quad \quad \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \\
& \quad \quad (- 64x^6 + 128x^4 - 72x^2 + 8)y(x)^4 + (64x^6 - 128x^4 + 72x^2 - 8)y(x)^2 \\
& + \\
& \quad \quad \quad 6 \quad 4 \quad 2 \\
& \quad \quad - 8x^6 + 16x^4 - 9x^2 + 1 \\
& * \\
& \quad +-----+ \\
& \quad \quad | \quad 2 \\
& \quad \quad \|y(x)^2 - 1 \\
& + \\
& \quad \quad \quad 5 \quad 3 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \quad 3 \\
& \quad \quad (- 64x^5 + 96x^3 - 32x)y(x)^5 + (96x^5 - 144x^3 + 48x)y(x)^3 \\
& + \\
& \quad \quad \quad 5 \quad 3 \\
& \quad \quad (- 32x^5 + 48x^3 - 16x)y(x)^3 \\
& * \\
& \quad +-----+ \\
& \quad \quad | \quad 2 \\
& \quad \quad \|x^2 - 1 \\
& + \\
& \quad \quad \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 5 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \\
& \quad \quad (64x^6 - 128x^4 + 72x^2 - 8)y(x)^5 + (- 96x^6 + 192x^4 - 108x^2 + 12)y(x)^3 \\
& + \\
& \quad \quad \quad 6 \quad 4 \quad 2 \\
& \quad \quad (32x^6 - 64x^4 + 36x^2 - 4)y(x)^3 \\
& / \\
& \quad \quad \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\
& \quad \quad (64x^4 - 64x^2 + 8)y(x)^4 + (- 64x^4 + 64x^2 - 8)y(x)^2 + 8x^4 - 8x^2 \\
& + \\
& \quad \quad \quad 1 \\
& * \\
& \quad +-----+ \\
& \quad \quad | \quad 2 \\
& \quad \quad \|x^2 - 1 \\
& + \\
& \quad \quad \quad 5 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 3 \\
& \quad \quad (- 64x^5 + 96x^3 - 32x)y(x)^4 + (64x^5 - 96x^3 + 32x)y(x)^2 - 8x^5 + 12x^3 \\
& + \\
& \quad \quad - 4x \\
& * \\
& \quad +-----+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{y(x)^2 - 1} \\
& + \left( (-64x^4 + 64x^2 - 8)y(x)^5 + (96x^4 - 96x^2 + 12)y(x)^3 \right. \\
& \quad \left. + (-32x^4 + 32x^2 - 4)y(x) \right) \\
& * \sqrt{x^2 - 1} \\
& + \left( (64x^5 - 96x^3 + 32x)y(x)^5 + (-96x^5 + 144x^3 - 48x)y(x)^3 \right. \\
& \quad \left. + (32x^5 - 48x^3 + 16x)y(x) \right) \\
& * \text{ROOT} \\
& \quad \left( (64x^3 - 32x)y(x)^3 + (-32x^3 + 16x)y(x) \right) \sqrt{x^2 - 1} \\
& \quad + \left( (-64x^4 + 64x^2 - 8)y(x)^3 + (32x^4 - 32x^2 + 4)y(x) \right) \\
& \quad * \sqrt{y(x)^2 - 1} \\
& \quad + \left( (-64x^3 + 32x)y(x)^4 + (64x^3 - 32x)y(x)^2 - 8x^3 + 4x \right) \sqrt{x^2 - 1} \\
& \quad + \left( (64x^4 - 64x^2 + 8)y(x)^4 + (-64x^4 + 64x^2 - 8)y(x)^2 + 8x^4 - 8x^2 \right. \\
& \quad \left. + 1 \right) \\
& \quad * \sqrt{y(x)^2 - 1} \\
& \quad + \log(\sqrt{y(x)^2 - 1} - y(x)) \\
& \quad + \sqrt{x^2 - 1}
\end{aligned}$$

```

--R      ((- 128x4 + 64x2)y(x) + (64x3 - 32x)y(x))\|x2 - 1
--R      +
--R      (128x4 - 128x2 + 16)y(x)3 + (- 64x4 + 64x2 - 8)y(x)2
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2
--R      log(\|x2 - 1 - x)
--R      +
--R      (- 128x3 + 64x5)y(x)5 + (128x5 - 48x3)y(x)3
--R      +
--R      (- 64x5 + 48x3)y(x)3
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2
--R      \|x2 - 1
--R      +
--R      (128x4 - 128x2 + 16)y(x)5
--R      +
--R      (- 128x6 + 64x4 + 64x2 - 16)y(x)3
--R      +
--R      (64x6 - 80x4 + 16x2 + 2)y(x)2
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2
--R      \|y(x)2 - 1
--R      +
--R      ((128x3 - 64x4)y(x)3 + (- 128x3 + 64x2)y(x)2 + 16x3 - 8x)3
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2
--R      \|x2 - 1
--R      +
--R      (- 128x4 + 128x2 - 16)y(x)4 + (128x4 - 128x2 + 16)y(x)2
--R      +
--R      - 16x4 + 16x2 - 2
--R      *
--R      +-----+

```

$$\begin{aligned}
& \log(\sqrt{x^2 - 1 - x}) \\
& + \left( (128x^3 - 64x^6)y(x) + (-128x^5 - 64x^3 + 80x)y(x)^4 \right. \\
& + \left. (128x^5 - 64x^3 - 16x^2)y(x)^2 - 16x^5 + 16x^3 - 2x \right) \\
& * \sqrt{x^2 - 1} \\
& + \left( (-128x^4 + 128x^2 - 16)y(x)^6 + (128x^6 - 128x^2 + 24)y(x)^4 \right. \\
& + \left. (-128x^6 + 128x^4 - 8)y(x)^2 + 16x^6 - 24x^4 + 8x^2 \right) \\
& * \log(\sqrt{y(x)^2 - 1 - y(x)}) \\
& + \left( (64x^3 - 32x^3)y(x)^3 + (-32x^3 + 16x)y(x) \right) \sqrt{x^2 - 1} \\
& + \left( (-64x^4 + 64x^2 - 8)y(x)^3 + (32x^4 - 32x^2 + 4)y(x)^2 \right) \\
& * \log(\sqrt{x^2 - 1 - x}) \\
& + \left( (128x^3 - 64x^5)y(x) + (-128x^5 + 48x)y(x)^3 \right. \\
& + \left. (64x^5 - 48x^3)y(x) \right) \\
& * \sqrt{x^2 - 1} \\
& + (-128x^4 + 128x^2 - 16)y(x)^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (128x^6 - 64x^4 - 64x^2 + 16)y(x)^3 \\
& + (-64x^6 + 80x^4 - 16x^2 - 2)y(x) \\
& * \log(\sqrt{x^2 - 1 - x}) \\
& + (64x^3 - 32x^7)y(x)^5 + (-128x^5 + 32x^3 + 32x)y(x)^5 \\
& + (64x^7 + 32x^5 - 320x^3 + 128x)y(x)^3 \\
& + (-32x^7 + 32x^5 + 128x^3 - 66x)y(x)^3 \\
& * \sqrt{x^2 - 1} \\
& + (-64x^4 + 64x^2 - 8)y(x)^7 + (128x^6 - 96x^4 - 32x^2 + 12)y(x)^5 \\
& + (-64x^8 + 344x^4 - 280x^2 + 28)y(x)^3 \\
& + (32x^8 - 48x^6 - 116x^4 + 132x^2 - 16)y(x)^2 \\
& * \sqrt{|y(x) - 1|} \\
& + ((-64x^3 + 32x^4)y(x)^3 + (64x^3 - 32x^2)y(x)^2 - 8x^3 + 4x)\sqrt{x^2 - 1} \\
& + (64x^4 - 64x^2 + 8)y(x)^4 + (-64x^4 + 64x^2 - 8)y(x)^2 + 8x^4 - 8x^2 \\
& + 1 \\
& *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \log(\sqrt{x^2 - 1 - x}) \\
& + \left( (-128x^3 + 64x^6)y(x) + (128x^5 + 64x^3 - 80x)y(x)^4 \right. \\
& \quad \left. + (-128x^5 + 64x^3 + 16x^2)y(x)^2 + 16x^5 - 16x^3 + 2x \right) \\
& * \sqrt{x^2 - 1} \\
& + \left( (128x^4 - 128x^2 + 16)y(x)^6 + (-128x^6 + 128x^2 - 24)y(x)^4 \right. \\
& \quad \left. + (128x^6 - 128x^4 + 8)y(x)^2 - 16x^6 + 24x^4 - 8x^2 \right) \\
& * \log(\sqrt{x^2 - 1 - x}) \\
& + \left( (-64x^3 + 32x^8)y(x)^5 + (128x^5 - 48x^6)y(x)^6 \right. \\
& \quad \left. + (-64x^7 - 96x^5 + 344x^3 - 116x^4)y(x)^4 \right. \\
& \quad \left. + (64x^7 - 32x^5 - 280x^3 + 132x^2)y(x)^2 - 8x^7 + 12x^5 + 28x^3 - 16x \right) \\
& * \sqrt{x^2 - 1} \\
& + \left( (64x^4 - 64x^2 + 8)y(x)^8 + (-128x^6 + 64x^4 + 64x^2 - 16)y(x)^6 \right. \\
& \quad \left. + (64x^8 + 64x^6 - 400x^4 + 272x^2 - 23)y(x)^4 \right. \\
& \quad \left. + (-64x^8 + 64x^6 + 272x^4 - 272x^2 + 31)y(x)^2 + 8x^8 - 16x^6 - 23x^4 \right)
\end{aligned}$$

```

--R      2
--R      31x  - 4
--R      /
--R      +-----+
--R      | 2
--R      ((256x  - 128x)y(x)  + (- 128x  + 64x)y(x))\|x  - 1
--R      +
--R      4      2      3      4      2
--R      (- 256x  + 256x  - 32)y(x)  + (128x  - 128x  + 16)y(x)
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2
--R      \|y(x)  - 1
--R      +
--R      3      4      3      2      3
--R      ((- 256x  + 128x)y(x)  + (256x  - 128x)y(x)  - 32x  + 16x)
--R      *
--R      +-----+
--R      | 2
--R      \|x  - 1
--R      +
--R      4      2      4      4      2      2      4
--R      (256x  - 256x  + 32)y(x)  + (- 256x  + 256x  - 32)y(x)  + 32x
--R      +
--R      2
--R      - 32x  + 4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 26

```

```

--S 27 of 120
ode62 := D(y(x),x) - (y(x)-x**2*sqrt(x**2-y(x)**2))/_
(x*y(x)*sqrt(x**2-y(x)**2)+x)
--R
--R      +-----+      +-----+
--R      | 2      2      ,      2 | 2      2
--R      (x y(x)\|- y(x)  + x  + x)y (x) + x \|- y(x)  + x  - y(x)
--R
--R      (27) -----
--R      +-----+
--R      | 2      2
--R      x y(x)\|- y(x)  + x  + x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 27

```

```

--S 28 of 120
ode62a:=solve(ode62,y,x)

```

```

--R
--R (28) "failed"
--R
--R                                         Type: Union("failed",...)
--E 28

```

```

--S 29 of 120
ode63 := D(y(x),x) - (1+ y(x)**2)/(abs(y(x)+sqrt(1+y(x)))*sqrt(1+x)**3)
--R
--R
--R          +-----+ ,          +-----+          2
--R          (x + 1)\|x + 1 y (x)abs(\|y(x) + 1 + y(x)) - y(x) - 1
--R
--R (29) -----
--R          +-----+ +-----+
--R          (x + 1)\|x + 1 abs(\|y(x) + 1 + y(x))
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E 29

```

```

--S 30 of 120
ode63a:=solve(ode63,y,x)
--R
--R (30) "failed"
--R
--R                                         Type: Union("failed",...)
--E 30

```

```

--S 31 of 120
ode64 := D(y(x),x) - sqrt((a*y(x)**2+b*y(x)+c)/(a*x**2+b*x+c))
--R
--R
--R          +-----+
--R          |      2
--R          |a y(x) + b y(x) + c
--R (31) y (x) - |-----
--R          |      2
--R          \| a x + b x + c
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E 31

```

```

--S 32 of 120
yx:=solve(ode64,y,x)
--R
--R (32)
--R      log
--R
--R          +-----+
--R          |      2
--R          |a y(x) + b y(x) + c
--R          2 2          +-+ |a |-----
--R          (2a x + 2a b x + 2a c)\|a |
--R          |      2

```



$$\begin{aligned}
& \sqrt{ax^2 + bx + c} \\
& * \\
& \frac{\sqrt{ay(x)^2 + by(x) + c}}{\sqrt{ay(x)^2 + by(x) + c}} \\
& + \\
& (-2ax^3 - 2abx^2 - 2acx)y(x) \\
& + \\
& (-2abx^2 - 2abx^2 - 2abcx)y(x) - 2acx^3 - 2abcx^2 \\
& + \\
& -2acx^2 \\
& * \\
& \frac{\sqrt{acy(x)^2 + bcy(x) + c}}{\sqrt{acy(x)^2 + bcy(x) + c}} \\
& + \\
& (-ax^4 - abx^3 - 2acx^2 - abcx - ac^2 - a^2)y(x) \\
& + \\
& (-abx^2 - abx^2 - 2abcx - bcx^2 - bc^2 - ab)y(x) \\
& + \\
& -acx^2 - abcx^3 - 2acx^2 - bcx^2 - c^3 - ac^2 \\
& * \\
& \frac{\sqrt{a}\sqrt{ay(x)^2 + by(x) + c}}{\sqrt{a}\sqrt{ay(x)^2 + by(x) + c}} \\
& + \\
& (2ax^4 + 2abx^3 + 2acx^2)y(x) \\
& + \\
& (2abx^3 + 2abx^2 + 2abcx)y(x) + 2acx^3 + 2abcx^2 \\
& + \\
& 2acx^2 \\
& * \\
& \frac{\sqrt{ay(x)^2 + by(x) + c}}{\sqrt{ay(x)^2 + by(x) + c}}
\end{aligned}$$

```

--R      \| a x + b x + c
--R      /
--R      +-----+
--R      |      2
--R      |a y(x) + b y(x) + c
--R      (2a x + 2a b x + 2a c) |-----
--R      |      2
--R      \| a x + b x + c
--R      *
--R      +-----+
--R      |      2
--R      \|a c y(x) + b c y(x) + c
--R      +
--R      3 4 2 3      2 3 2
--R      (a x + a b x - a b c x - a c - a )y(x)
--R      +
--R      2 4 2 3 2      2 2      2 4      3
--R      (a b x + a b x - b c x - b c - a b)y(x) + a c x + a b c x
--R      +
--R      2 3 2
--R      - b c x - c - a c
--R      +
--R      log
--R      +-----+
--R      +-+ +-+ |      2 +-+
--R      (2\|a \|c - 2a y(x))\|a y(x) + b y(x) + c + 2a y(x)\|c
--R      +
--R      2 +-+
--R      (- 2a y(x) - b y(x) - 2c)\|a
--R      /
--R      +-----+
--R      +-+ |      2
--R      2\|c \|a y(x) + b y(x) + c - b y(x) - 2c
--R      /
--R      +-+
--R      \|a
--R
--R      Type: Union(Expression Integer,...)
--E 32

```

The results of this substitution are too long to include. It should be zero but Axiom cannot simplify it.

```

(*)+≡
--S 33 of 120
ode64expr := D(yx,x) - sqrt((a*yx**2+b*yx+c)/(a*x**2+b*x+c));
--E 33

--S 34 of 120
ode65 := D(y(x),x) - sqrt((y(x)**3+1)/(x**3+1))
--R
--R
--R          +-----+
--R          |      3
--R          |y(x)  + 1
--R   (34)  y (x) - |-----
--R          |      3
--R          \|  x  + 1
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 34

--S 35 of 120
ode65a:=solve(ode65,y,x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          |      3
--R          |y(x)  + 1
--R          |-----
--R          x      |      3
--R          ++      \|  %P  + 1
--R   (35)  | - ----- d%P  + |      y(x)
--R          ++      +-----+      ++      1
--R          |      3      +-----+      +-----+
--R          \|y(x)  + 1      \|  %P  + 1
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E 35

--S 36 of 120
ode66 := D(y(x),x) - sqrt(abs(y(x)*(1-y(x))*(1-a*y(x))))/_
sqrt(abs(x*(1-x)*(1-a*x)))
--R
--R   (36)
--R          +-----+
--R          |      3      2
--R          - \|abs(a y(x)  + (- a - 1)y(x)  + y(x))
--R          +
--R          +-----+

```

```

--R      |      3      2      ,
--R      \|\abs(a x  + (- a - 1)x  + x) y (x)
--R
--R /
--R      +-----+
--R      |      3      2
--R      \|\abs(a x  + (- a - 1)x  + x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 36

```

```

--S 37 of 120
ode66a:=solve(ode66,y,x)
--R
--R (37) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 37

```

```

--S 38 of 120
ode67 := D(y(x),x) - sqrt(1-y(x)**4)/sqrt(1-x**4)
--R
--R      +-----+      +-----+
--R      |  4      ,      |  4
--R      \|- x  + 1 y (x) - \|- y(x)  + 1
--R
--R (38) -----
--R      +-----+
--R      |  4
--R      \|- x  + 1
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 38

```

```

--S 39 of 120
ode67a:=solve(ode67,y,x)
--R
--R (39) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 39

```

```

--S 40 of 120
ode68 := D(y(x),x) - sqrt((a*y(x)**4+b*y(x)**2+1)/(a*x**4+b*x**2+1))
--R
--R      +-----+
--R      |      4      2
--R      |a y(x)  + b y(x)  + 1
--R (40) y (x) - |-----
--R      |      4      2

```

```

--R          \|  a x  + b x  + 1
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 40

```

```

--S 41 of 120
ode68a:=solve(ode68,y,x)

```

```

--R
--R
--R (41)
--R          +-----+
--R          |      4      2
--R          | a y(x)  + b y(x)  + 1
--R          |-----+
--R          x  |      2      4      y(x)
--R          ++ \|  %N b + %N a + 1      ++
--R          | - ----- d%N + | ----- d%N
--R          ++ +-----+      ++ +-----+
--R          |      4      2      | 2      4
--R          \| a y(x)  + b y(x)  + 1      \| %N b + %N a + 1
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E 41

```

```

--S 42 of 120
ode69 := D(y(x),x) - sqrt((b4*y(x)**4+b3*y(x)**3+b2*y(x)**2+b1*y(x)+b0)*_
(a4*x**4+a3*x**3+a2*x**2+a1*x+a0))

```

```

--R
--R
--R (42)
--R      ,
--R      y (x)
--R
--R      +
--R      -
--R      ROOT
--R          4      3      2      4
--R      (a4 b4 x  + a3 b4 x  + a2 b4 x  + a1 b4 x + a0 b4)y(x)
--R      +
--R          4      3      2      3
--R      (a4 b3 x  + a3 b3 x  + a2 b3 x  + a1 b3 x + a0 b3)y(x)
--R      +
--R          4      3      2      2
--R      (a4 b2 x  + a3 b2 x  + a2 b2 x  + a1 b2 x + a0 b2)y(x)
--R      +
--R          4      3      2      4
--R      (a4 b1 x  + a3 b1 x  + a2 b1 x  + a1 b1 x + a0 b1)y(x) + a4 b0 x
--R      +

```

```

--R          3          2
--R      a3 b0 x  + a2 b0 x  + a1 b0 x + a0 b0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 42

```

```

--S 43 of 120
ode69a:=solve(ode69,y,x)
--R
--R
--R      >> Error detected within library code:
--R      PF0::possibleOrder: more than 1 algebraic constant
--R
--R      Continuing to read the file...
--R
--E 43

```

```

--S 44 of 120
ode70 := D(y(x),x) - sqrt((a4*x**4+a3*x**3+a2*x**2+a1*x+a0)/_
                        (b4*y(x)**4+b3*y(x)**3+b2*y(x)**2+b1*y(x)+b0))
--R
--R
--R      +-----+
--R      |          4          3          2
--R      |      a4 x  + a3 x  + a2 x  + a1 x + a0
--R      (43) y (x) - |-----
--R      |          4          3          2
--R      |      \|b4 y(x)  + b3 y(x)  + b2 y(x)  + b1 y(x) + b0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 44

```

```

--S 45 of 120
ode70a:=solve(ode70,y,x)
--R
--R
--R      >> Error detected within library code:
--R      PF0::possibleOrder: more than 1 algebraic constant
--R
--R      Continuing to read the file...
--R
--E 45

```

```

--S 46 of 120
ode71 := D(y(x),x) - sqrt((b4*y(x)**4+b3*y(x)**3+b2*y(x)**2+b1*y(x)+b0)/_
                        (a4*x**4+a3*x**3+a2*x**2+a1*x+a0))
--R
--R
--R      +-----+
--R      |          4          3          2

```

```

--R      ,      |b4 y(x) + b3 y(x) + b2 y(x) + b1 y(x) + b0
--R (44) y (x) - |-----
--R      |      4      3      2
--R      \|      a4 x + a3 x + a2 x + a1 x + a0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 46

```

```

--S 47 of 120
ode71a:=solve(ode71,y,x)

```

```

--R
--R (45)
--R      +-----+
--R      |      4      3      2
--R      |b4 y(x) + b3 y(x) + b2 y(x) + b1 y(x) + b0
--R      |-----+
--R      x |      4      3      2
--R      ++ \|      %N a4 + %N a3 + %N a2 + %N a1 + a0
--R      | - ----- d%N
--R      ++ +-----+
--R      |      4      3      2
--R      \|b4 y(x) + b3 y(x) + b2 y(x) + b1 y(x) + b0
--R +
--R      y(x)
--R      ++
--R      |      1
--R      |----- d%N
--R      ++ +-----+
--R      | 4      3      2
--R      \|%N b4 + %N b3 + %N b2 + %N b1 + b0
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E 47

```

```

--S 48 of 120
R1:=operator 'R1

```

```

--R
--R (46) R1
--R
--R                                          Type: BasicOperator
--E 48

```

```

--S 49 of 120
R2:=operator 'R2

```

```

--R
--R (47) R2
--R
--R                                          Type: BasicOperator
--E 49

```

```

--S 50 of 120
ode72 := D(y(x),x) - R1(x,sqrt(a4*x**4+a3*x**3+a2*x**2+a1*x+a0))*_
      R2(y(x),sqrt(b4*y(x)**4+b3*y(x)**3+b2*y(x)**2+b1*y(x)+b0))
--R
--R (48)
--R -
--R +-----+
--R | 4 3 2
--R R1(x,\|a4 x + a3 x + a2 x + a1 x + a0 )
--R *
--R +-----+
--R | 4 3 2
--R R2(y(x),\|b4 y(x) + b3 y(x) + b2 y(x) + b1 y(x) + b0 )
--R +
--R ,
--R y (x)
--R
--R Type: Expression Integer
--E 50

```

```

--S 51 of 120
ode72a:=solve(ode72,y,x)
--R
--R >> Error detected within library code:
--R Function not supported by Risch d.e.
--R
--R Continuing to read the file...
--R
--E 51

```

```

--S 52 of 120
ode73 := D(y(x),x) - ((a3*x**3+a2*x**2+a1*x+a0)/_
      (a3*y(x)**3+a2*y(x)**2+a1*y(x)+a0))**(2/3)
--R
--R +-----+2
--R | 3 2
--R | a3 x + a2 x + a1 x + a0
--R (49) y (x) - |-----
--R 3| 3 2
--R \|a3 y(x) + a2 y(x) + a1 y(x) + a0
--R
--R Type: Expression Integer
--E 52

```





--R Type: Expression Integer  
 --E 57

--S 58 of 120  
 yx:=solve(ode76,y,x)

--R (55)

$$\frac{\log\left(\frac{(-b^2 + a^2)\sin(y(x)) + b\sqrt{-b^2 + a^2}\cos(y(x)) - a\sqrt{-b^2 + a^2}}{a\cos(y(x)) - b}\right) + x\sqrt{-b^2 + a^2}}{\sqrt{-b^2 + a^2}}$$

--R Type: Union(Expression Integer,...)  
 --E 58

--S 59 of 120  
 ode76expr := D(yx,x) - a\*cos(yx) + b

--R (56)

$$\begin{aligned} & ((-a^2b^2 + a^4)\cos^2(y(x)) + a^3b^2 - a^3b)\sin^2(y(x)) \\ & + a^2b\sqrt{-b^2 + a^2}\cos^2(y(x)) + (-a^2b^2 - a^3)\sqrt{-b^2 + a^2}\cos^3(y(x)) \\ & + a^2b\sqrt{-b^2 + a^2} \\ & * \cos\left(\log\left(\frac{(-b^2 + a^2)\sin(y(x)) + b\sqrt{-b^2 + a^2}\cos(y(x)) - a\sqrt{-b^2 + a^2}}{a\cos(y(x)) - b}\right)\right) \end{aligned}$$

```

--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          x\|- b + a
--R      /
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- b + a
--R      +
--R          +-----+
--R          | 2 2      2      2 2
--R          - a\|- b + a sin(y(x)) + (- b + a )sin(y(x))
--R      +
--R          +-----+      +-----+
--R          | 2 2      2      | 2 2
--R          - a\|- b + a cos(y(x)) + b\|- b + a cos(y(x))
--R      *
--R      ,
--R      y (x)
--R      +
--R          3      2      3      3      4      3      2 2      2
--R      ((a b + a b - a b - a )cos(y(x)) - b - b + a b + a b)sin(y(x))
--R      +
--R          +-----+
--R          2      | 2 2      2
--R      (- a b - a b)\|- b + a cos(y(x))
--R      +
--R          +-----+      +-----+
--R          3      2      2      2      | 2 2      2      | 2 2
--R      (b + b + a b + a )\|- b + a cos(y(x)) + (- a b - a b)\|- b + a
--R      /
--R          +-----+
--R          2      3      3      2      | 2 2      2
--R      ((a b - a )cos(y(x)) - b + a b)sin(y(x)) - a b\|- b + a cos(y(x))
--R      +
--R          +-----+      +-----+
--R          2      2      | 2 2      2      | 2 2
--R      (b + a )\|- b + a cos(y(x)) - a b\|- b + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 59

```

```

--S 60 of 120
ode77 := D(y(x),x) - cos(a*y(x)+b*x)
--R
--R
--R      ,
--R      (57) y (x) - cos(a y(x) + b x)

```

```

--R
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 60

```

```

--S 61 of 120
ode77a:=solve(ode77,y,x)
--R
--R (58) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 61

```

```

--S 62 of 120
ode78 := D(y(x),x) + a*sin(alpha*y(x)+beta*x) + b
--R
--R
--R (59) y (x) + a sin(alpha y(x) + beta x) + b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 62

```

```

--S 63 of 120
ode78a:=solve(ode78,y,x)
--R
--R (60) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 63

```

```

--S 64 of 120
ode79 := D(y(x),x) + f(x)*cos(a*y(x)) + g(x)*sin(a*y(x)) + h(x)
--R
--R
--R (61) y (x) + g(x)sin(a y(x)) + f(x)cos(a y(x)) + h(x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 64

```

```

--S 65 of 120
ode79a:=solve(ode79,y,x)
--R
--R (62) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 65

```

```

--S 66 of 120
ode80 := D(y(x),x) + f(x)*sin(y(x)) + (1-D(f(x),x))*cos(y(x)) - D(f(x),x) - 1
--R

```

```

--R
--R (63)  $y'(x) + (-\cos(y(x)) - 1)f'(x) + f(x)\sin(y(x)) + \cos(y(x)) - 1$ 
--R
--R Type: Expression Integer
--E 66

```

```

--S 67 of 120
ode80a:=solve(ode80,y,x)
--R
--R (64) "failed"
--R
--R Type: Union("failed",...)
--E 67

```

```

--S 68 of 120
ode81 := D(y(x),x) + 2*tan(y(x))*tan(x) - 1
--R
--R
--R (65)  $y'(x) + 2\tan(x)\tan(y(x)) - 1$ 
--R
--R Type: Expression Integer
--E 68

```

```

--S 69 of 120
ode81a:=solve(ode81,y,x)
--R
--R (66) "failed"
--R
--R Type: Union("failed",...)
--E 69

```

```

--S 70 of 120
ode82 := D(y(x),x) - a*(1+tan(y(x))**2) + tan(y(x))*tan(x)
--R
--R
--R (67)  $y'(x) - a \tan^2(y(x)) + \tan(x)\tan(y(x)) - a$ 
--R
--R Type: Expression Integer
--E 70

```

```

--S 71 of 120
ode82a:=solve(ode82,y,x)
--R
--R (68) "failed"
--R
--R Type: Union("failed",...)
--E 71

```

```

--S 72 of 120

```

```

ode83 := D(y(x),x) - tan(x*y(x))
--R
--R
--R      ,
--R (69) y (x) - tan(x y(x))
--R
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 72

```

```

--S 73 of 120
ode83a:=solve(ode83,y,x)
--R
--R (70) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 73

```

```

--S 74 of 120
ode84 := D(y(x),x) - f(a*x + b*y(x))
--R
--R
--R      ,
--R (71) y (x) - f(b y(x) + a x)
--R
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 74

```

```

--S 75 of 120
ode84a:=solve(ode84,y,x)
--R
--R (72) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 75

```

```

--S 76 of 120
ode85 := D(y(x),x) - x**(a-1)*y(x)**(1-b)*f(x**a/a + y(x)**b/b)
--R
--R
--R      b      a
--R      a - 1   - b + 1  a y(x)  + b x      ,
--R (73) - x    y(x)      f(-----) + y (x)
--R                                     a b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 76

```

```

--S 77 of 120
ode85a:=solve(ode85,y,x)
--R
--R (74) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)

```

--E 77

--S 78 of 120

ode86 := D(y(x),x) - (y(x)-x\*f(x\*\*2+a\*y(x)\*\*2))/(x+a\*y(x)\*f(x\*\*2+a\*y(x)\*\*2))

--R

--R (a y(x)f(a y(x)<sup>2</sup> + x<sup>2</sup>) + x)y'(x) + x f(a y(x)<sup>2</sup> + x<sup>2</sup>) - y(x)

--R

--R (75) -----

--R

--R a y(x)f(a y(x)<sup>2</sup> + x<sup>2</sup>) + x

--R

Type: Expression Integer

--E 78

--S 79 of 120

ode86a:=solve(ode86,y,x)

--R

--R (76) "failed"

--R

Type: Union("failed",...)

--E 79

--S 80 of 120

ode87 := D(y(x),x) - (y(x)\*a\*f(x\*\*c\*y(x))+c\*x\*\*a\*y(x)\*\*b)/\_ (x\*b\*f(x\*\*c\*y(x))-x\*\*a\*y(x)\*\*b)

--R

--R a b c , a b c  
--R (x y(x) - b x f(y(x)x ))y'(x) + c x y(x) + a y(x)f(y(x)x )

--R

--R (77) -----

--R

--R x y(x) - b x f(y(x)x )

--R

Type: Expression Integer

--E 80

--S 81 of 120

ode87a:=solve(ode87,y,x)

--R

--R (78) "failed"

--R

Type: Union("failed",...)

--E 81

--S 82 of 120

ode88 := 2\*D(y(x),x) - 3\*y(x)\*\*2 - 4\*a\*y(x) - b - c\*exp(-2\*a\*x)

--R

--R , - 2a x 2  
--R (79) 2y'(x) - c %e - 3y(x) - 4a y(x) - b

```

--R
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 82

```

```

--S 83 of 120
ode88a:=solve(ode88,y,x)
--R
--R (80) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 83

```

```

--S 84 of 120
ode89 := x*D(y(x),x) - sqrt(a**2 - x**2)
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R (81) xy (x) - \|- x + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 84

```

```

--S 85 of 120
ode89a:=solve(ode89,y,x)
--R
--R (82)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          | 2 2 2 \|- x + a - a 2
--R (a\|- x + a - a )log(-----) - x
--R                               x
--R [particular= -----,basis= [1]]
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a - a
--RType: Union(Record(particular: Expression Integer,basis: List Expression Integer),.
--E 85

```

```

--S 86 of 120
yx:=ode89a.particular
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          | 2 2 2 \|- x + a - a 2
--R (a\|- x + a - a )log(-----) - x
--R                               x
--R (83) -----

```



```

--R          +-----+
--R          |  2  2
--R          \|- x  + a  - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 86

```

```

--S 87 of 120
ode89expr := x*D(yx,x) - sqrt(a**2 - x**2)
--R
--R (84)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 87

```

```

--S 88 of 120
ode90 := x*D(y(x),x) + y(x) - x*sin(x)
--R
--R
--R (85)  xy (x) - x sin(x) + y(x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 88

```

```

--S 89 of 120
ode90a:=solve(ode90,y,x)
--R
--R
--R          sin(x) - x cos(x)      1
--R (86) [particular= -----,basis= [-]]
--R          x                      x
--RType: Union(Record(particular: Expression Integer,basis: List Expression Integer),.
--E 89

```

```

--S 90 of 120
yx:=ode90a.particular
--R
--R          sin(x) - x cos(x)
--R (87) -----
--R          x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 90

```

```

--S 91 of 120
ode90expr := x*D(yx,x) + yx - x*sin(x)
--R
--R (88)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 91

```

```

--S 92 of 120
ode91 := x*D(y(x),x) - y(x) - x/log(x)
--R
--R
--R      ,
--R      x log(x)y (x) - y(x)log(x) - x
--R
--R      (89) -----
--R              log(x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 92

--S 93 of 120
ode91a:=solve(ode91,y,x)
--R
--R      (90) [particular= x log(log(x)),basis= [x]]
--RType: Union(Record(particular: Expression Integer,basis: List Expression Integer),.
--E 93

--S 94 of 120
yx:=ode91a.particular
--R
--R      (91) x log(log(x))
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 94

--S 95 of 120
ode91expr := x*D(yx,x) - yx - x/log(x)
--R
--R      (92) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 95

--S 96 of 120
ode92 := x*D(y(x),x) - y(x) - x**2*sin(x)
--R
--R      ,      2
--R      xy (x) - x sin(x) - y(x)
--R      (93)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 96

--S 97 of 120
ode92a:=solve(ode92,y,x)
--R
--R      (94) [particular= - x cos(x),basis= [x]]

```

```
--RType: Union(Record(particular: Expression Integer,basis: List Expression Integer),.
--E 97
```

```
--S 98 of 120
yx:=ode92a.particular
--R
--R (95) - x cos(x)
--R
--R Type: Expression Integer
--E 98
```

```
--S 99 of 120
ode92expr := x*D(yx,x) - yx - x**2*sin(x)
--R
--R (96) 0
--R
--R Type: Expression Integer
--E 99
```

```
--S 100 of 120
ode93 := x*D(y(x),x) - y(x) - x*cos(log(log(x)))/log(x)
--R
--R
--R - x cos(log(log(x))) + x log(x)y'(x) - y(x)log(x)
--R
--R (97) -----
--R log(x)
--R
--R Type: Expression Integer
--E 100
```

```
--S 101 of 120
ode93a:=solve(ode93,y,x)
--R
--R (98) [particular= x sin(log(log(x))),basis= [x]]
--RType: Union(Record(particular: Expression Integer,basis: List Expression Integer),.
--E 101
```

```
--S 102 of 120
yx:=ode93a.particular
--R
--R (99) x sin(log(log(x)))
--R
--R Type: Expression Integer
--E 102
```

```
--S 103 of 120
ode93 := x*D(yx,x) - yx - x*cos(log(log(x)))/log(x)
--R
```

```

--R (100) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 103

--S 104 of 120
ode94 := x*D(y(x),x) +a*y(x) + b*x**n
--R
--R
--R          ,          n
--R (101)  xy (x) + b x  + a y(x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 104

--S 105 of 120
ode94a:=solve(ode94,y,x)
--R
--R
--R          n log(x)
--R          b %e
--R (102)  [particular= - -----,basis= [%e          ]]
--R          n + a
--RType: Union(Record(particular: Expression Integer,basis: List Expression Integer),.
--E 105

--S 106 of 120
yx:=ode94a.particular
--R
--R          n log(x)
--R          b %e
--R (103)  - -----
--R          n + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 106

--S 107 of 120
ode94expr := x*D(yx,x) +a*yx + b*x**n
--R
--R          n log(x)          n
--R (104)  - b %e          + b x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 107

--S 108 of 120
exprule := rule x^n == %e^(n*log(x))
--R
--R          n          n log(x)
--R (105)  x == %e

```

```
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E 108
```

```
--S 109 of 120
exprule ode94expr
--R
--R (106) 0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E 109
```

```
--S 110 of 120
ode95 := x*D(y(x),x) + y(x)**2 + x**2
--R
--R                                     ,
--R (107) xy (x) + y(x)2 + x2
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E 110
```

```
--S 111 of 120
ode95a:=solve(ode95,y,x)
--R
--R
--R (108) "failed"
--R
--R                                     Type: Union("failed",...)
--E 111
```

```
--S 112 of 120
ode96 := x*D(y(x),x) - y(x)**2 + 1
--R
--R
--R                                     ,
--R (109) xy (x) - y(x)2 + 1
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E 112
```

```
--S 113 of 120
yx:=solve(ode96,y,x)
--R
--R
--R                                     - x y(x) - x
--R (110) -----
--R                                     +-----+ +-----+
--R                                     \|y(x) - 1 \|y(x) + 1
--R
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E 113
```

```

--S 114 of 120
ode96expr := x*D(yx,x) - yx**2 + 1
--R
--R (111)
--R      2      2      2      +-----+ +-----+      2
--R      x y (x) + ((- x + 1)y(x) - x - 1)\|y(x) - 1 \|y(x) + 1 - x y(x) + x
--R
--R -----
--R
--R      +-----+ +-----+
--R      (y(x) - 1)\|y(x) - 1 \|y(x) + 1
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 114

```

```

--S 115 of 120
ode98 := x*D(y(x),x) + a*y(x)**2 - b*y(x) + c*x**(2*b)
--R
--R
--R      ,      2b      2
--R (112) xy (x) + c x + a y(x) - b y(x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 115

```

```

--S 116 of 120
ode98a:=solve(ode98,y,x)
--R
--R (113) "failed"
--R
--R                                          Type: Union("failed",...)
--E 116

```

```

--S 117 of 120
ode99 := x*D(y(x),x) + a*y(x)**2 - b*y(x) - c*x**beta
--R
--R
--R      ,      beta      2
--R (114) xy (x) - c x + a y(x) - b y(x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 117

```

```

--S 118 of 120
ode99a:=solve(ode99,y,x)
--R
--R
--R (115) "failed"

```

```

--R                                                    Type: Union("failed",...)
--E 118

--S 119 of 120
ode100 := x*D(y(x),x) + x*y(x)**2 + a
--R
--R
--R
--R
--R      ,
--R      2
--R (116) xy (x) + x y(x) + a
--R
--R                                                    Type: Expression Integer
--E 119

--S 120 of 120
ode100a:=solve(ode100,y,x)
--R
--R
--R (117) "failed"
--R
--R                                                    Type: Union("failed",...)
--E 120
)spool
)lisp (bye)

```

## References

- [1] <http://www.cs.uwaterloo.ca/~ecterrab/odetools.html>